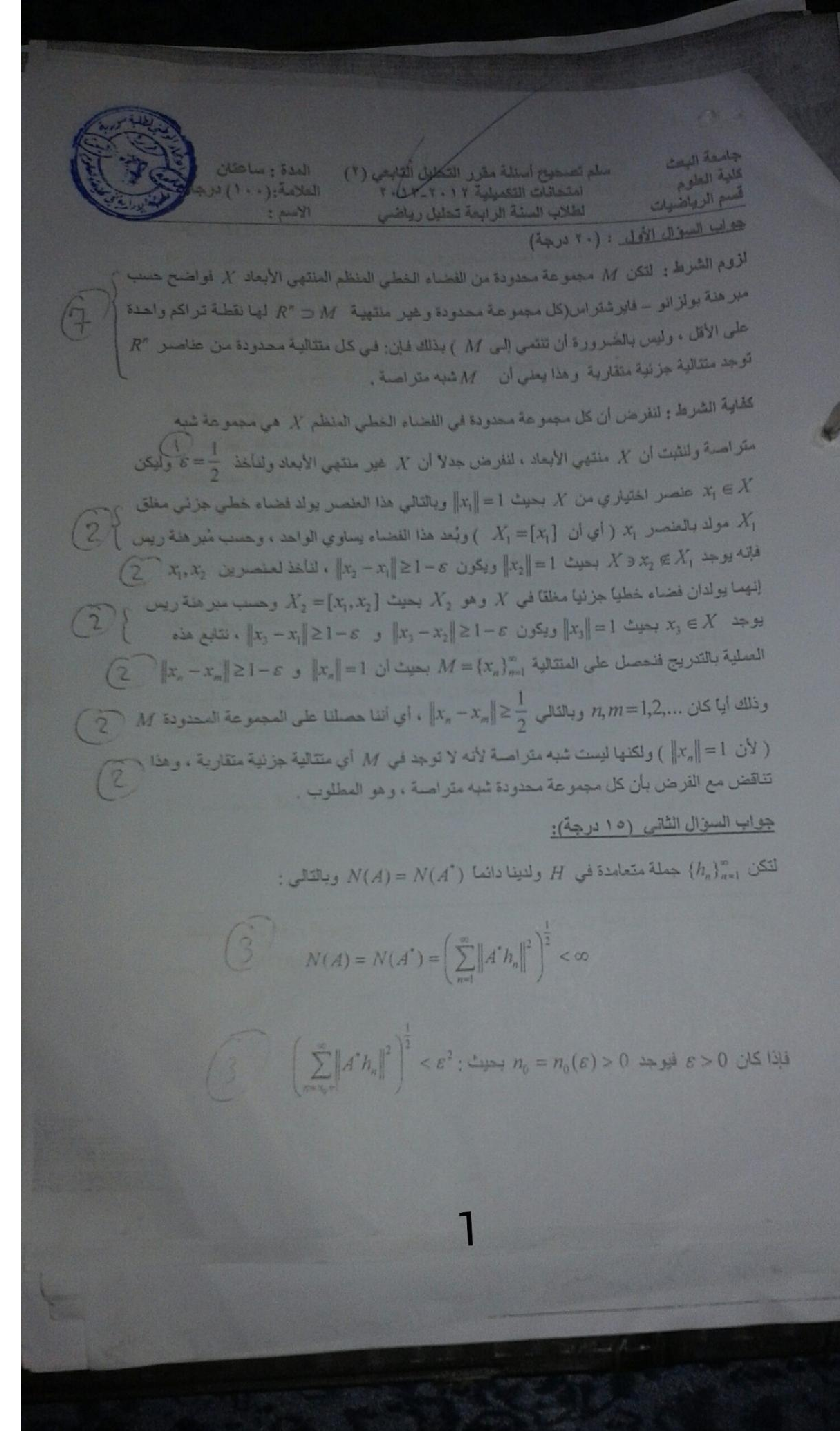


جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

سلم تصحيح أسئلة مقرر التحليل التابعي (٢)
امتحانات التكميلية ٢٠١٢-٢٠١٣
لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

المدة : ساعتان
العلامة:(١٠٠) درجة
الاسم :

جواب السؤال الأول : (٢٠ درجة)

لزوم الشرط : لتكن M مجموعة محدودة من الفضاء الخطي المنظم المنتهي الأبعاد X فواضح حسب مبرهنة بولزانو – فايرشتراس(كل مجموعة محدودة وغير منتهية $M \subset R^n$ لها نقطة تراكم واحدة على الأقل ، وليس بالضرورة أن تنتمي إلى M) بذلك فإن: في كل متتالية محدودة من عناصر R^n توجد متتالية جزئية متقاربة وهذا يعني أن M شبه متراصة .

كفاية الشرط : لنفرض أن كل مجموعة محدودة في الفضاء الخطي المنظم X هي مجموعة شبه متراصة ولنثبت أن X منتهي الأبعاد ، لنفرض جدلاً أن X غير منتهي الأبعاد ولنأخذ $\varepsilon = \frac{1}{2}$ وليكن $x_1 \in X$ عنصر اختياري من X بحيث $\|x_1\| = 1$ وبالتالي هذا العنصر يولد فضاء خطي جزئي مغلق X_1 مولد بالعنصر x_1 (أي أن $X_1 = [x_1]$) وبُعد هذا الفضاء يساوي الواحد ، وحسب مبرهنة ريس فإنه يوجد $X_1 \not\ni x_2 \in X$ بحيث $\|x_2\| = 1$ ويكون $\|x_2 - x_1\| \geq 1 - \varepsilon$ ، لنأخذ العنصرين x_1, x_2 إنهما يولدان فضاء خطياً جزئياً مغلقاً في X وهو X_2 بحيث $X_2 = [x_1, x_2]$ وحسب مبرهنة ريس يوجد $x_3 \in X$ بحيث $\|x_3\| = 1$ ويكون $\|x_3 - x_2\| \geq 1 - \varepsilon$ و $\|x_3 - x_1\| \geq 1 - \varepsilon$ ، نتابع هذه العملية بالتدريج فنحصل على المتتالية $M = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث أن $\|x_n\| = 1$ و $\|x_n - x_m\| \geq 1 - \varepsilon$ وذلك أيا كان $n, m = 1, 2, \dots$ وبالتالي $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ ، أي أننا حصلنا على المجموعة المحدودة M (لأن $\|x_n\| = 1$) ولكنها ليست شبه متراصة لأنه لا توجد في M أي متتالية جزئية متقاربة ، وهذا تناقض مع الفرض بأن كل مجموعة محدودة شبه متراصة ، وهو المطلوب .

جواب السؤال الثاني (١٥ درجة):

لتكن $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ جملة متعامدة في H ولدينا دائماً $N(A) = N(A^*)$ وبالتالي :

$$N(A) = N(A^*) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|A^* h_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

فإذا كان $\varepsilon > 0$ فيوجد $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ بحيث : $\left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|A^* h_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon^2$

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الأول ٢٠١٤-٢٠١٥
أسئلة مقرر التحليل التابعي (٢)
لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

المدة : ساعة ونصف
العلامة:(١٠٠) درجة
الاسم : [redacted]

السؤال الأول (١٥+١٠=٢٥ درجة):

١)- ليكن A مؤثر خطي ومحدود من فضاء هيلبرت H في نفسه أثبت أن :

المؤثر A متراص ⇔ مرافقه A^* متراص .

٢)- ليكن $A: H \to H$ أثبت أن $\sigma(AA^*)$ لا يحوي اعداد سالبة .

السؤال الثاني (٢٠ درجة):

لنأخذ المجموعة $\overline{K}(0,1)=\{f\in C[0,1];\|f\|\le 1\}$ ولنعرف المجموعة

$M=\left\{g(x)=\int_0^x f(t)dt : f\in\overline{K}(0,1)\right\}$ بين فيم اذا كانت M شبه متراصة في $C[0,1]$ أم لا .

السؤال الثالث (٣٠ درجة):

ليكن $A: H\to H$ حيث H فضاء هيلبرت العقدي ، مؤثر خطي ومحدود ومترافق ذاتياً ولتكن $\lambda\in C$ أثبت أن الشرطان التاليان متكافئان :

١- $\lambda\in\rho(A)$

٢- $c>0$ ، $\|(A-\lambda I)x\|\ge c\|x\|$.

السؤال الرابع (٢٥ درجة):

ليكن A مؤثراً حيث $A:\ell_2\to\ell_2$ معرف بالشكل :

$$A(\xi_1,\xi_2,\ldots)=(\xi_1,-\xi_2,\xi_3,-\xi_4,\ldots,(-1)^{n-1}\xi_n,\ldots)$$

أوجد القيم الخاصة و العناصر الخاصة الموافقة للمؤثر A ثم استنتج فيم اذا كان A مؤثر متراص أم لا .

انتهت الأسئلة
مدرس المقرر
الدكتور سامح العرجة

حمص في١٦ / ٢ / ٢٠١٥ م. مع التمنيات بالنجاح والتوفيق

4

جامعة البعث — سلم تصحيح أسئلة مقرر التحليل التابعي (٢) — المدة : ساعة ونصف

كلية العلوم الثانية — امتحانات الفصل الأول ٢٠١٤-٢٠١٥ — العلامة:(١٠٠) درجة

قسم الرياضيات — لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

جواب السؤال الأول (١٥+١٠=٢٥ درجة):

١)-($\Leftarrow$): نعتبر في البداية أن المؤثر A متراص . عندئذ توجد متتالية من المؤثرات المنتهية البعد $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث أن : $\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n - A\| = 0$. وبحسب مبرهنة فإن A_n^* مؤثرات منتهية . لدينا أيضاً

$$\|A_n^* - A^*\| = \|(A_n - A)^*\| = \|A - A_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

أي أن المؤثر A^* هو نهاية متتالية من المؤثرات المنتهية البعد $\{A_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ ، فهو متراص .

($\Rightarrow$) إذا كان A^* متراصاً فيكون مرافقه $A = (A^*)^*$ متراصاً . وبذلك يتم المطلوب .

٢)- بما أن $(AA^*)^* = AA^*$ فإن AA^* مترافق ذاتياً وحسب مبرهنة تكون جميع طيفه حقيقي أي أن $\sigma(AA^*) \subset R$ وحتى نثبت أن $\sigma(AA^*)$ لا يحوي أعداد سالبة يكفي أن نثبت أن $-\lambda \in \rho(AA^*)$ من أجل $\lambda \in \sigma(AA^*)$ من أجل ذلك بحسب مبرهنة يكفي إثبات أن :

$$\|(AA^* - (-\lambda I))x\| \geq c\|x\| \quad , \quad c > 0 \quad , \quad \forall x \in H$$

في الحقيقة لدينا ما يلي :

$$\|(AA^* + \lambda I)x\|^2 = \langle AA^*x + \lambda x, AA^*x + \lambda x\rangle = \langle AA^*x, AA^*x\rangle + \lambda\langle x, AA^*x\rangle +$$
$$+ \lambda\langle AA^*x, x\rangle + \lambda^2\langle x, x\rangle =$$

$$= \underbrace{\|AA^*x\|^2}_{\geq 0} + \lambda\underbrace{\langle A^*x, A^*x\rangle}_{\geq 0} + \lambda\underbrace{\langle AA^*x, x\rangle}_{\geq 0} + \lambda^2\|x\|^2 \geq \lambda^2\|x\|^2 \quad , \quad \forall x \in H$$

وبالتالي $-\lambda \in \rho(AA^*)$ هو المطلوب ، وكذلك نفس الكلام بالنسبة لـ A^*A .

جواب السؤال الثاني (٢٠ درجة) :

المجموعة M محدودة لأن :

$$\|g\|=\left\|\int_0^x f(t)dt\right\|=\max_{x\in[0,1]}\left\|\int_0^x f(t)dt\right\|\le\max_{x\in[0,1]}\left\|\max_{t\in[0,1]} f(t)\int_0^x dt\right\|=$$

$$=\max_{x\in[0,1]}\left\|f\right\|\int_0^x dt\,\Big\|=\|f\|\max_{x\in[0,1]}\left\|\int_0^x dt\right\|\le\max_{x\in[0,1]}\|x\|=1$$

وذلك أياً $g(x)\in M$.

ولنبين أنها كذلك مستمرة بنفس الدرجة : ليكن $\varepsilon>0$ اختياري ولنأخذ $\delta=\varepsilon$ فنجد أنه أياً كان $x,x'\in[0,1]$ وبحيث $|x-x'|<\delta=\varepsilon$ فيكون :

$$|g(x)-g(x')|=\left|\int_0^x f(t)dt-\int_0^{x'} f(t)dt\right|=\left|\int_{x'}^x f(t)dt\right|\le\max_{t\in[0,1]}|f(t)|\left|\int_{x'}^x dt\right|=$$

$$=\|f\|\left\|t\,\Big|_{x'}^{x}\right\|=\|f\|\,|x-x'|\le|x-x'|<\varepsilon$$

وبالتالي أمكن إيجاد $\delta=\delta(\varepsilon)=\varepsilon$ بحيث تتحقق شروط مبرهنة أرزيلا – إسكولي وبالتالي توابع M مستمرة بنفس الدرجة في $C[0,1]$ أي أن M شبه متراصة في $C[0,1]$.

جواب السؤال الثالث (٣٠ درجة) :

$(1\longrightarrow 2)$: بما أن $\lambda\in\rho(A)$ فإن $R_\lambda(A)=(A-\lambda I)^{-1}$ موجود ومحدود ومعرّف على مجموعة كثيفة حيث $R_\lambda(A):H\to H$ ولنفرض أن $\|R_\lambda(A)\|=K>0$ وبالتالي وبما أن $I=(A-\lambda I)R_\lambda(A)$ فإن :

$$\|x\|=\|Ix\|=\|(A-\lambda I)R_\lambda(A)x\|\le\|R_\lambda(A)\|\,\|(A-\lambda I)x\|=K\|(A-\lambda I)x\|$$

وبالتالي $c>0$ ، $\|(A-\lambda I)x\|\ge\frac{1}{K}\|x\|\ge c\|x\|$ وهو المطلوب .

$(2\longrightarrow 1)$ حتى يكون $\lambda\in\rho(A)$ يجب أن يكون $R_\lambda(A)=(A-\lambda I)^{-1}$ موجود ومحدود ومعرف على مجموعة كثيفة في H .

إثبات الوجود : حتى يكون $R_\lambda(A)=(A-\lambda I)^{-1}$ موجود يجب أن يكون $A-\lambda I$ متباين و غامر .

التباين : ليكن $(A-\lambda I)x=(A-\lambda I)y$ عندئذ :

$$\|0\|=\|(A-\lambda I)(x-y)\|\geq c\|x-y\|\geq 0 \;\Rightarrow\; \|x-y\|=0 \;\Rightarrow\; x=y$$

3 الغمر : لنأخذ $A-\lambda I:H\to R(A-\lambda I)$ عندئذٍ كل عنصر من المستقر هو صورة لعنصر من المنطلق وبالتالي المؤثر $A-\lambda I$ غامر .

إثبات المجموعة الكثيفة : سنثبت أن مجموعة تعريف $R_\lambda(A)=(A-\lambda I)^{-1}$ كثيفة في H وبما أن $D(A-\lambda I)^{-1}=R(A-\lambda I)$ أي يجب أن نثبت أن $R(A-\lambda I)$ كثيفة في H .

إذا كانت $\overline{R(A-\lambda I)}=H$ فإن $R(A-\lambda I)$ كثيفة في H وخلاف ذلك يجب إثبات أن $\overline{R(A-\lambda I)}^{\perp}=0$ لأن $H=\overline{R(A-\lambda I)}\oplus\overline{R(A-\lambda I)}^{\perp}$ ، ليكن $z\in\overline{R(A-\lambda I)}^{\perp}$ وبالتالي $z\perp\overline{R(A-\lambda I)}$ وبالتالي $\langle (A-\lambda I)x,z\rangle=0$ أي أن $\langle Ax,z\rangle-\lambda\langle x,z\rangle=0$ ولكن $\langle Ax,z\rangle=\langle x,Az\rangle$ لأن A مترافق ذاتياً أي أن $\langle Ax,z\rangle=\langle x,Az\rangle=\lambda\langle x,z\rangle=\langle x,\bar{\lambda}z\rangle$ وبالتالي $Az=\bar{\lambda}z$ وبما أن A مترافق ذاتياً فإن $\lambda=\bar{\lambda}$ فإن $Az=\lambda z$ أي : $(A-\lambda I)z=Az-\lambda z=0$ 3

3 وبالتالي : $0=\|(A-\lambda I)z\|\geq c\|z\|>0$ ، وهذا لا يتحقق إلا من أجل $\|z\|=0$ وبالتالي $z=0$ أي أن $\overline{R(A-\lambda I)}^{\perp}=0$ أي أن $R(A-\lambda I)$ كثيفة في H ، إذن $R_\lambda(A)=(A-\lambda I)^{-1}$ معرف على مجموعة كثيفة في H .

5 **المحدودية :** $\|x\|=\|Ix\|=\|(A-\lambda I)(R_\lambda(A)x)\|\geq c\|R_\lambda(A)x\|$

وبالتالي $\|R_\lambda(A)x\|\leq\frac{1}{c}\|x\|=c'\|x\|$ وهذا يعني أن $R_\lambda(A)$ محدود ومما سبق نجد $\lambda\in\rho(A)$.

جواب السؤال الرابع (٢٥ درجة):

نضع $Ax=\lambda x$ فيكون

$$(\xi_1,-\xi_2,\xi_3,-\xi_4,\ldots)=(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\lambda\xi_3,\lambda\xi_4,\ldots)$$

فنحصل على $n=0,1,2,\ldots$ ، $\xi_{2n+1}=\lambda\xi_{2n+1}$ ، $\xi_{2n}=-\lambda\xi_{2n}$ 5

فإذا كان $n=0,1,2,\ldots$ ، $\xi_{2n}=0$ ، $\xi_{2n+1}\neq 0 \Rightarrow \lambda=1$

وتكون القيمة الخاصة في هذه الحالة هي $\lambda=1$ والأشعة الخاصة الموافقة لها هي $x=(\xi_1,0,\xi_3,0,\ldots)$.

وبالتالي يكون $N(A-I)=\{x\in \ell_2 \ ; x=(\xi_1,0,\xi_3,0,\xi_5,.....) \ , \ \xi_i \in C\}$

ونلاحظ أن هذا الفضاء يملك القاعدة التالية $(1,0,0,...),(0,0,1,...),(0,0,0,0,1,...)$ التي عددها لا نهائي وبالتالي $\dim N(A-I)=\infty$. 3

أما إذا كان $\xi_{2n}\neq 0 \Rightarrow \lambda=-1 \ , \ \xi_{2n+1}=0 \ , \ n=0,1,2,....$

وتكون القيمة الخاصة في هذه الحالة هي $\lambda=-1$ والأشعة الخاصة الموافقة لها هي $x=(0,\xi_2,0,\xi_4,....)$. 5

وبالتالي يكون $N(A+I)=\{x\in \ell_2 \ , \ x=(0,\xi_2,0,\xi_4,...) \ , \ \xi_i\in C\}$

ونلاحظ أن هذا الفضاء يملك القاعدة التالية $(0,1,0,0,...),(0,0,0,1,...),(0,0,0,0,0,1,...)$ التي عددها لا نهائي وبالتالي $\dim N(A+I)=\infty$. 3

مما سبق نستنتج أن A غير متراص لأنه لو كان متراصاً لكان $\dim N(A-\lambda I)=n<\infty$ من أجل كل $\lambda\neq 0$. 9

حمص في ١٦/ ٢/ ٢٠١٥ م. انتهت الإجابات

مدرس المقرر

الدكتور ساطع العرجة

السؤال الأول (٢٥ درجة) :

ليكن H فضاء هيلبرت الفصول ، ولتكن $M \subset H$. أثبت أن M تكون شبه متراصة إذا وفقط إذا كانت محدودة بانتظام وتحقق الشرط $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle u_k \right\| < \varepsilon$ وذلك أياً كان $x \in M$ ، حيث $a_k = \langle x, u_k \rangle$ عوامل فورييه للعنصر x وفق الجملة التامة $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ في H .

السؤال الثاني (٢٠ درجة) :

أعط مثالاً تبين فيه أنه ليس من الضروري إذا تقاربت متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ من المؤثر A أن تتقارب المتتالية $\{A_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ من المؤثر A^* .

السؤال الثالث (خمس درجات لكل طلب =٣٥ درجة) :

اثبت ان المؤثر $A : \ell_2 \to \ell_2$ المعطى بالشكل :

$$A x = (0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\ldots) \quad ; \quad x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\ldots)$$

خطي و **محدود** ثم أوجد $\|A\|$. أوجد $\|A^*\|$ ثم برهن أن $\sigma_p(A) = \varnothing$ وأن كل عدد يحقق $|\lambda| < 1$ هو **قيمة خاصة لـ** A^* . أوجد $N(A^* - \lambda I)$ (الأشعة الخاصة الموافقة للقيم الخاصة بالإضافة إلى الصفر للمؤثر A^*) .

السؤال الرابع (٢٠درجة) :

أثبت أن كل مؤثر موجب $A : H \longrightarrow H$ محدود ومترافق ذاتياً له جذر تربيعي موجب T وحيد ويكون تبادلياً مع كل مؤثر تبادلي مع A .

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر

الدكتور سامح العرجه

حمص في ٣٠ / ٦ / ٢٠١٥ م. مع التمنيات بالنجاح والتوفيق

وبالتالي نحصل على العنصر (١) $x=(\xi_1,\lambda\xi_1,\lambda^2\xi_1,\dots)$ وهو ينتمي إلى ℓ_2 لأن :

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2=\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda^n|^2|\xi_1|^2\le|\xi_1|^2\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda|^{2n}\overset{|\lambda|<1}{<}\infty$$

وبالتالي حصلنا على العنصر الخاص $x\neq 0$ و $x\in\ell_2$ وهو المطلوب .

__إيجاد__ $N(A^*-\lambda I)$: من (١) نجد :

$$N(A^*-\lambda I)=\{\,x\in\ell_2:\ x=\xi(1,\lambda,\lambda^2,\lambda^3,\dots)\ ;\ \xi\in\mathbb{C}\,\}$$

__جواب السؤال الرابع(٢٠ درجة):__

__إثبات الوحدانية :__ ليكن المؤثر الموجب $A:H\to H$ [illegible] ، ولنفرض أن له جذران مو[illegible]

$T_1\ge 0$ ، $T_2\ge 0$ __عندئذٍ__ $T_1^2=A$ ، $T_2^2=A$ ويكون [illegible] $T_1=A^{\frac{1}{2}}$ وبالتالي يكون

$T_1T_2=A$ وبالتالي :

$$(T_1-T_2)^2=T_1^2+T_2^2-2T_1T_2=A+A-2A=0$$

وبالتالي $T_1-T_2=0$ أي أن $T_1=T_2$ وهو المطلوب .

إثبات أن T تبادلي مع كل مؤثر تبادلي مع A :

ليكن S مؤثر تبادلي مع A عندئذ $SA=AS$ ويكون :

$$S^2T^2-T^2S^2=SST^2-T^2SS=S(SA)-(AS)S=SSA-SAS=S(SA-SA)=$$

$$=S(SA-SA)=S.0=0\ \Rightarrow\ S^2T^2=T^2S^2\ \Rightarrow\ ST=TS$$

وبالتالي S مؤثر تبادلي مع T وهو المطلوب .

حمص في ٣٠ / ٦ / ٢٠١٥ م. انتهت الإجابات مدرس المقرر

الدكتور سامح العرجه

وبالتالي نحصل على العنصر (١) $x=(\xi_1,\lambda\xi_1,\lambda^2\xi_1,\dots)$ وهو ينتمي إلى ℓ_2 لأن:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\xi_n|^2=\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda^n|^2|\xi_1|^2\le|\xi_1|^2\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda|^{2n}\overset{|\lambda|<1}{<}\infty$$

وبالتالي حصلنا على العنصر الخاص $x\neq 0$ ، ℓ_2 وهو المطلوب.

إيجاد $N(A^*-\lambda I)$: من (١) نجد:

$$N(A^*-\lambda I)=\{\,x\in\ell_2:\ x=\xi(1,\lambda,\lambda^2,\lambda^3,\dots)\ ;\ \xi\in\mathbb{C}\,\}$$

جواب السؤال الرابع (٢٠ درجة):

إثبات الوحدانية: ليكن المؤثر الموجب $A:H\to H$ محدود ومترافق ذاتياً ولنفرض أن له جذرين وحيدين $T_1\ge 0$ ، $T_2\ge 0$ عندئذ $T_2^2=A$ ، $T_1^2=A$ ويكون $T_2=A^{\frac{1}{2}}$ ، $T_1=A^{\frac{1}{2}}$ وبالتالي يكون $T_1T_2=A$ وبالتالي:

$$(T_1-T_2)^2=T_1^2+T_2^2-2T_1T_2=A+A-2A=0$$

وبالتالي $T_1-T_2=0$ أي أن $T_1=T_2$ وهو المطلوب.

إثبات أن T تبادلي مع كل مؤثر تبادلي مع A :

ليكن S مؤثر تبادلي مع A عندئذ $SA=AS$ ويكون:

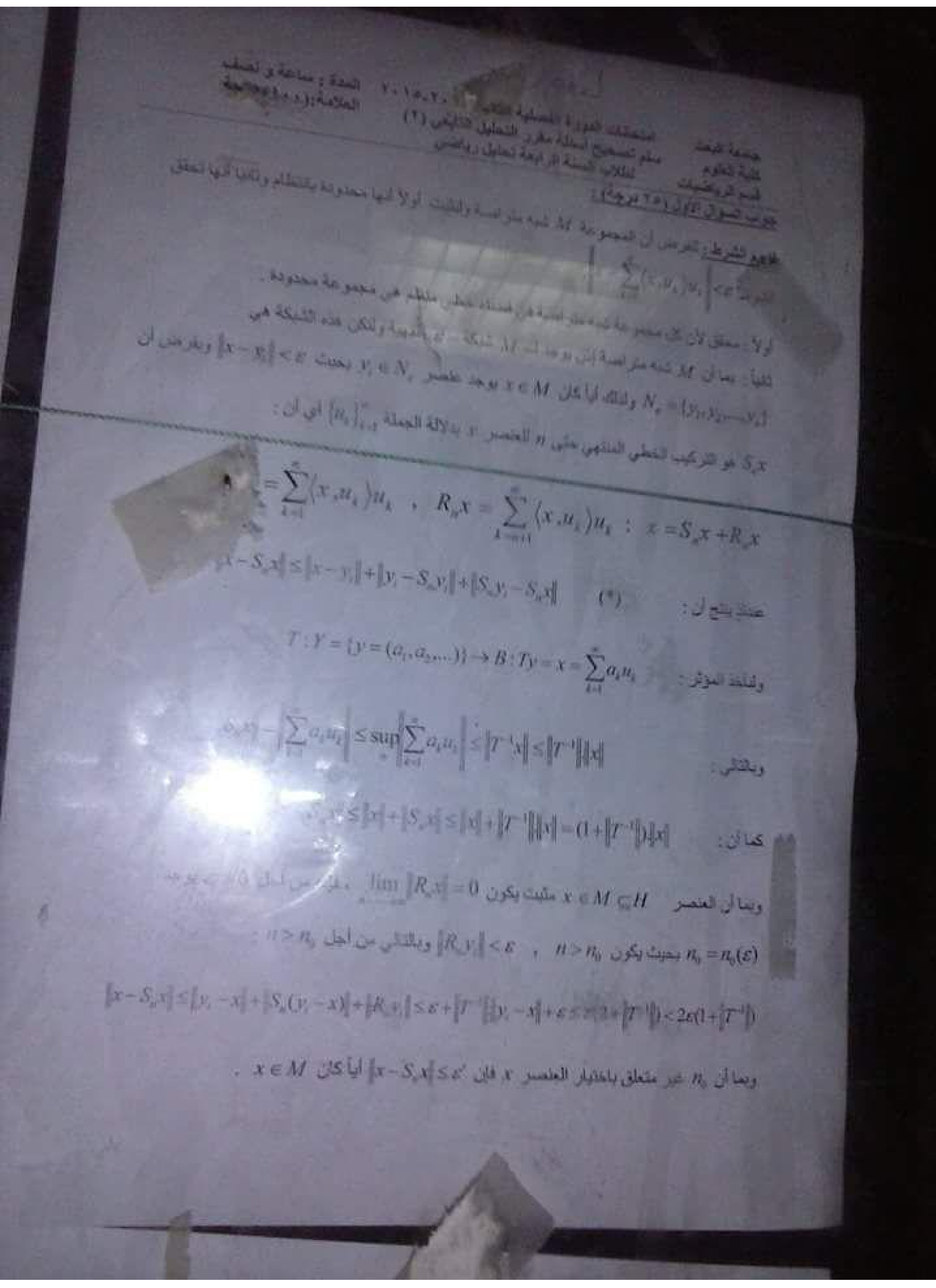
$$S^2T^2-T^2S^2=SST^2-T^2SS=S(SA)-(AS)S=SSA-SAS=S(SA-SA)=$$

$$=S(SA-SA)=S.0=0\ \Rightarrow\ S^2T^2=T^2S^2\ \Rightarrow\ ST=TS$$

وبالتالي S مؤثر تبادلي مع T وهو المطلوب.

حمص في ٣٠/٦/٢٠١٥م. انتهت الإجابات مدرس المقرر

الدكتور سامح العرجه



جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الفصلية الثانية
سلم تصحيح أسئلة مقرر التحليل التابعي (٢)
لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

٢٠١٥-٢٠[illegible]

المدة: ساعة و نصف
العلامة: (١٠٠) درجة

جواب السؤال الأول: (٢٥ درجة)

لزوم الشرط: نفرض أن المجموعة M شبه متراصة والتي نثبت أولاً أنها محدودة بانتظام وثانياً أنها تحقق الشرط $\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty}\langle x,u_k\rangle u_k\right\|<\varepsilon$

أولاً: محقق لأن كل مجموعة شبه متراصة في فضاء نظيمي هي مجموعة محدودة.

ثانياً: بما أن M شبه متراصة فإن يوجد لـ M شبكة ε- منتهية ولتكن هذه الشبكة هي $N_\varepsilon=\{y_1,y_2,\dots,y_r\}$ وبالتالي أياً كان $x\in M$ يوجد عنصر $y_i\in N_\varepsilon$ بحيث $\|x-y_i\|<\varepsilon$ ونفرض أن $S_n x$ هو التركيب الخطي المنتهي حتى n للعنصر x بدلالة الجملة $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ أي أن:

$$S_n x=\sum_{k=1}^{n}\langle x,u_k\rangle u_k \quad , \quad R_n x=\sum_{k=n+1}^{\infty}\langle x,u_k\rangle u_k \ : \ x=S_nx+R_nx$$

عندئذ ينتج أن:
$$\|x-S_nx\|\le\|x-y_i\|+\|y_i-S_ny_i\|+\|S_ny_i-S_nx\| \qquad (*)$$

ولنأخذ المؤثر:
$$T:Y=\{y=(a_1,a_2,\dots)\}\to B: Ty=x=\sum_{k=1}^{\infty}a_ku_k$$

وبالتالي:
$$\|S_nx\|=\left\|\sum_{k=1}^{n}a_ku_k\right\|\le\sup_n\left\|\sum_{k=1}^{n}a_ku_k\right\|\le\|T^{-1}x\|\le\|T^{-1}\|\|x\|$$

كما أن:
$$\|R_nx\|\le\|x\|+\|S_nx\|\le\|x\|+\|T^{-1}\|\|x\|=(1+\|T^{-1}\|)\|x\|$$

وبما أن العنصر $x\in M\subseteq H$ مثبت يكون $\lim_{n\to\infty}\|R_nx\|=0$ ، [illegible] يوجد $n_0=n_0(\varepsilon)$ بحيث يكون $n>n_0$ ، $\|R_ny_i\|<\varepsilon$ وبالتالي من أجل $n>n_0$:

$$\|x-S_nx\|\le\|y_i-x\|+\|S_n(y_i-x)\|+\|R_ny_i\|\le\varepsilon+\|T^{-1}\|\|y_i-x\|+\varepsilon\le\varepsilon(2+\|T^{-1}\|)<2\varepsilon(1+\|T^{-1}\|)$$

وبما أن n_0 غير متعلق باختيار العنصر x فإن $\|x-S_nx\|\le\varepsilon'$ أياً كان $x\in M$.

Scanned by CamScanner

M محدودة بانتظام وأنها تحقق الشرط $\left\| x-\sum_{k=1}^{n}(x,u_k)u_k \right\| < \varepsilon$ ولنثبت أن

كفاية الشرط: نفرض أن M [illegible] المجموعة M شبه متراصة . فمن أجل عدد $\varepsilon > 0$ مفروض نختار عدد $n_0 = n_0(\varepsilon)$ بحيث يكون $\|R_{n_0}x\| < \varepsilon$ [illegible] $\forall x \in M$ ولنأخذ المجموعة $M_{n_0} = \{z : z = R_{n_0}x ; x \in M\}$ وهذه المجموعة [illegible] جزئية من الفضاء المنتهي الأبعاد والجزئي من H وهو E^n المولد بالعناصر $u_1, u_2, \dots, u_n$ ويمكن [illegible] ومن كون $\|S_{n_0}x\| < \|T^{-1}\|\|x\| < c\|T^{-1}\| =$ [illegible] $, \forall z = S_{n_0}x \in M_{n_0}$ فإن المجموعة M_{n_0} محدودة وبالتالي فهي شبه متراصة في E^n وبالتالي يوجد شبكة $\varepsilon -$ منتهية لـ M_{n_0} وهذه الشبكة تشكل شبكة $2\varepsilon -$ للمجموعة M وبالتالي M شبه متراصة

(من كون $\|x-y\| \le \|x - S_{n_0}x\| + \|S_{n_0}x - y\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$).

جواب السؤال الثاني (٢٠ درجة) :

نفرض $A_n : \ell_2 \longrightarrow \ell_2 ; A_n(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = (\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, \dots)$ ونفرض $\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax$ فإن $\|A_n x\| = \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ و أن $\|A_n x - Ax\| \le \|A_n x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ وبالتالي $\|A_n x - Ax\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ فالمتتالية $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة من A ، ولنجد المؤثرات المرافقة لهذه المتتالية

نفرض $y = (y_1, y_2, \dots)$ ، $A^*y = (z_1, z_2, \dots)$ ولنأخذ الجداء الداخلي في X' كما هو معلوم فنجد $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$

$\langle x, A_n^* y \rangle = \langle A_n x, y \rangle \Rightarrow$ [illegible] $+ \dots = \xi_{n+1}\overline{y_1} + \xi_{n+2}\overline{y_2} + \xi_{n+3}\overline{y_3} + \dots$

بالمطابقة نجد $z_k = 0 ; k = 1, 2, 3, \dots, n \quad \& \; z_k = y_{k-n} ; k = n+1, n+2, \dots$

بذلك فإن متتالية المؤثرات المرافقة : $A_n^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots)$

وبالتالي $\|A_n^* y\| = \|y\|$ اي ان $\|A_n^* y - A^* y\| \le \|A_n^* y\| = \|y\| \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

جواب السؤال الثالث (خمس درجات لكل طلب = ٣٥ درجة):

الخطية: لنثبت أن $A(\alpha x+\beta y)=\alpha A(x)+\beta A(x)$

نفرض $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots)$ & $y=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\ldots)$ و $\alpha,\beta\in C$ فإن:

$$A(\alpha x+\beta y)=A((\alpha\xi_1,\alpha\xi_2,\alpha\xi_3,\ldots)+(\beta\eta_1,\beta\eta_2,\beta\eta_3,\ldots))=$$
$$A(\alpha\xi_1+\beta\eta_1,\alpha\xi_2+\beta\eta_2,\alpha\xi_3+\beta\eta_3,\ldots)=(0,\alpha\xi_1+\beta\eta_1,\alpha\xi_2+\beta\eta_2,\alpha\xi_3+\beta\eta_3,\ldots)$$
$$=(0,\alpha\xi_1,\alpha\xi_2,\alpha\xi_3,\ldots)+(0,\beta\eta_1,\beta\eta_2,\beta\eta_3,\ldots)=\alpha A(x)+\beta A(y)$$

المحدودية: نلاحظ أن $c=1$; $\|Ax\|=\|x\|\Rightarrow\|Ax\|\le c\|x\|$ وهذا يعني أن A محدود.

إيجاد النظيم: $\|Ax\|=\|x\|\Rightarrow\|A\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=1$

إيجاد المؤثر المرافق: من تعريف المؤثر المرافق $(Ax,y)=(x,A^*y)$ وبفرض

$A^*y=(z_1,z_2,z_3,\ldots)$ يكون لدينا:

$$((0,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots),(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\ldots))=((\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots),(z_1,z_2,z_3,\ldots))$$
$$\xi_1\overline{\eta_2}+\xi_2\overline{\eta_3}+\xi_3\overline{\eta_4}+\ldots=\xi_1\overline{z_1}+\xi_2\overline{z_2}+\xi_3\overline{z_3}+\ldots\quad\Rightarrow$$
$$\eta_2=z_1,\ \eta_3=z_2,\ \eta_4=z_3,\ldots$$

أي أن: $A^*y=(\eta_2,\eta_3,\ldots)$.

برهن أن: $\sigma_p(A)=\emptyset$ لنفرض جدلاً أن $\sigma_p(A)\neq\phi$ هذا يعني أنه توجد قيمة خاصة λ للمؤثر وبالتالي يوجد عنصر $x\neq 0$ بحيث يكون $Ax=\lambda x$ وبالتالي $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\ldots)=(0,\xi_1,\xi_2,\ldots)$ وبالتالي $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\ldots)=(0,0,0,\ldots)$ وهو ليس عنصراً خاصاً وبالتالي $\sigma_p(A)=\emptyset$.

إيجاد القيم الخاصة لـ A^*:

نفرض $\lambda\in C$ بحيث $|\lambda|<1$ ولنبحث عن $x\neq 0$ بحيث يكون $A^*x=\lambda x$ وبالتالي

$$(\xi_2,\xi_3,\xi_4,\ldots)=(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\lambda\xi_3,\ldots)$$

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الثاني ٢٠١٣-٢٠١٤
أسئلة مقرر التحليل التابعي (٢)
لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

المدة : ساعة ونصف
العلامة:(١٠٠) درجة
الاسم :

السؤال الأول (٢٠ درجة):

ليكن $A:X\to Y$ مؤثر خطي و $\dim X=n<\infty$ اثبت أن A مؤثر منتهي البعد ومحدود ويكون $\dim R(A)\le n$.

السؤال الثاني (٢٥ درجة) :

لتكن متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث : $A_n:\ell_2\to\ell_2$ وأن :

$$A_n(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots)=(\frac{\xi_1}{1},\frac{\xi_2}{2},\frac{\xi_3}{3},\dots,\frac{\xi_n}{n},0,0,\dots)$$

أثبت أن هذه المتتالية متراصة ، واستنتج أن نهايتها $\lim_{n\to\infty}A_n$ مؤثر متراص .

السؤال الثالث (٢٠ درجة) :

ليكن $A:B\to B$ مؤثر خطي ومحدود من فضاء باناخ في نفسه عندئذٍ إذا كان A^{-1} موجودا ينتمي إلى $L(B,B)$ فعندئذٍ $\sigma(A^{-1})=\left\{\frac{1}{\lambda}\ ;\ \lambda\in\sigma(A)\right\}$.

السؤال الرابع (٢٠ درجة):

ليكن $A:H\to H$ مؤثر خطي ومحدود ومترافق ذاتيا حيث H فضاء هيلبرت العقدي ، ولتكن $\lambda\in C$ عندئذٍ الشرطان التاليان متكافئان :

١) - $\lambda\in\rho(A)$.

٢) - $c>0$ ، $\|(A-\lambda I)x\|\ge c\|x\|$.

السؤال الخامس (١٥ درجة):

أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون المؤثر A واحدي من الفضاء H_1 في الفضاء H_2 هو أن يكون $\|Ax\|_{H_2}=\|x\|_{H_1}$.

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر
الدكتور سامح العرجة

حمص في ٣٠/٦/٢٠١٤ م. مع التمنيات بالنجاح والتوفيق

جامعة البعث — امتحانات الفصل الأول ٢٠١٢-٢٠١٣ — المدة : ساعتان

كلية العلوم — أسئلة مقرر التحليل التابعي (٢) — العلامة : (١٠٠) درجة

قسم الرياضيات — لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي — الاسم : [illegible]

السؤال الأول (١٥+١٥=٣٠ درجة):

أ)- أثبت أن كل مجموعة محدودة $M \subset E^n$ (E^n حقيقي) تكون شبه متراصة . ص٩

ب)- ليكن H فضاء هيلبرت عقدي و $A \in L(H)$ مؤثر مترافق ذاتيا أثبت أن $\sigma_r(A)=\varnothing$.

السؤال الثاني (١٠+١٠=٢٠ درجة) :

أ)- ليكن $A:B \to B$ وليكن $T:B \to B$ و $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(T)$ أثبت أن

$$R_\lambda(A)-R_\lambda(T)=R_\lambda(A)(T-A)R_\lambda(T)$$

ب)- إذا كان $N(A)<\infty$ ($N(A)$ نظيم هيلبرت شميث للمؤثر A) أثبت أن A متراص. ص٧٤

السؤال الثالث (١٥+١٥=٣٠ درجة) : ص٥٦

أ)- لتكن $A:B \to B$ مؤثرا خطيا محدودا ، حيث B فضاء باناخ . عندئذ تكون $\rho(A)$ مجموعة مفتوحة و $\sigma(A)$ مجموعة مغلقة في C .

ب)- ليكن A مؤثر من $L(B,B)$ ، إذا كان $\|A\|<1$ عندئذ يكون المؤثر $(I-A)^{-1}$ موجودا في $L(B,B)$ ،وأن $(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} A^n$. ثم استنتج أنه إذا كان $\|A\|<|\lambda|$ عندئذ يكون $(A-\lambda I)^{-1}=-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$. ص٥١

السؤال الرابع (٢٠ درجة):

ليكن A مؤثرا حيث $A:\ell_2 \to \ell_2$ معرف بالشكل :

$$A(\xi_1,\xi_2,\ldots)=(\xi_1,-\xi_2,\xi_3,-\xi_4,\ldots,(-1)^{n-1}\xi_n,\ldots)$$

١)- أثبت أن A مؤثر خطي ومحدود .

٢)- أثبت أن $\lambda=\pm 1$ قيم خاصة وأوجد العناصر الخاصة الموافقة .

انتهت الأسئلة — مدرس المقرر

حمص في ٢/٢/٣ ٢٠١٣ م. مع التمنيات بالنجاح والتوفيق — الدكتور سامح العرجة

جامعة البعث	امتحانات الدورة التكميلية ٢٠١٢-٢٠١٣	المدة : ساعتان
كلية العلوم	أسئلة مقرر التحليل التابعي (٢)	العلامة:(١٠٠) درجة
قسم الرياضيات	لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي	الاسم :

السؤال الأول (٢٠ درجة):

أثبت أن الفضاء الخطي المنظم يكون منته الأبعاد إذا وفقط إذا كانت كل مجموعة جزئية محدودة فيه هي مجموعة شبه متراصة.

السؤال الثاني (١٥ درجة) :

أثبت أنه إذا كان $N(A) < \infty$ عندئذ يكون المؤثر A متراصا. ($N(A)$ نظيم هيلبرت- شميدت للمؤثر A).

السؤال الثالث (٢٠ درجة) :

أثبت أن كل مجموعة شبه متراصة في فضاء خطي منظم تكون محدودة أما في الحالة العامة ليس من الضروري أن تكون كل مجموعة محدودة هي شبه متراصة.

السؤال الرابع (٢٥ درجة) :

ليكن $p > 1$; $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ولنأخذ المؤثر : $(Ax)_i = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}\,\xi_i$ حيث $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ عنصرا من ℓ_p وأما المصفوفة العددية (a_{ij}) ؛ $(i,j = 1,2,\ldots)$ فهي بحيث أن المتسلسلة

$\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q$ متقاربة. برهن أن المؤثر A متراص.

السؤال الخامس (٢٠ درجة) : اختر أحد السؤالين

١)- إذا كان $A : X \to X$ مؤثر متراص حيث X فضاء خطي منظم عندئذ من أجل كل قيمة $\lambda \neq 0$ يوجد m بحيث يكون $X = N(A-\lambda I)^m \oplus R(A-\lambda I)^m$.

٢)- إذا كان H فضاء هيلبرت وكان $A : H \to H$ مؤثر خطي ومحدود ومترافق ذاتيا فإن طيفه حقيقي أيضا أي $\sigma(A) \subset R$.

انتهت الأسئلة — مدرس المقرر

حمص ٢٠١٣/٨/٢٠ م. مع التمنيات بالنجاح والتوفيق — الدكتور سامح العرجة